



۱) اگر میانگین داده‌های $x_1 - 1, x_2 - 2, \dots, x_n - n$ برابر $\bar{x}$ باشد میانگین داده‌های $x_1 + 1, x_2 + 2, \dots, x_n + n$ کدام است؟

- ۱) $\bar{x} + n + 1$ ۲) $\bar{x} + \frac{n(n+1)}{2}$ ۳) $\bar{x} + \frac{n+1}{2}$ ۴) $2\bar{x}$

۲) در داده‌های آماری ۱۳، ۱۲، ۱۲، ۱۱، ۹، ۸، ۸، ۶، ۶، ۴، ۳، ۳ داده‌های کم‌تر از چارک اول و بیش‌تر از چارک سوم را حذف کنید. ضریب تغییرات داده‌های باقی‌مانده کدام است؟

- ۱) ۰٫۱۵ ۲) ۰٫۱۷ ۳) ۰٫۲۱ ۴) ۰٫۲۵

۳) یک جامعه با اندازه‌ی ۱۲ و واریانس ۱۲٫۶، با جامعه‌ی دیگری به اندازه‌ی ۲۴ و واریانس ۷٫۲، تشکیل جامعه‌ی جدیدی داده‌اند. اگر میانگین این دو جامعه یکسان باشد، انحراف معیار جامعه‌ی جدید، کدام است؟

- ۱) ۲٫۹ ۲) ۳ ۳) ۳٫۱ ۴) ۳٫۲

۴) میانگین و انحراف معیار ۲۲ داده‌ی آماری به ترتیب ۱۶ و ۲ می‌باشد، اگر داده‌های ۱۷ و ۲۰ و ۱۱، به آنان افزوده شوند، واریانس ۲۵ داده‌ی حاصل، کدام است؟

- ۱) ۴٫۸ ۲) ۴٫۹ ۳) ۵٫۱ ۴) ۵٫۲

۵) داده‌های آماری ۱۱، ۱۵، ۱۷، ۱۶، ۱۴، ۹، ۱۱، ۱۲، ۱۵، ۱۸، ۱۴ را در نظر بگیرید، انحراف معیار داده‌های بین چارک اول و سوم تقریباً کدام است؟

- ۱) ۱٫۱ ۲) ۱٫۲ ۳) ۱٫۲۵ ۴) ۱٫۳



۶) تعداد مسافریں یک اتوبوس در ۵ ایستگاه اتوبوس اعداد ۵، ۹، a ، ۱۸ و ۱۰ هستند. اگر دامنه تغییرات آن‌ها ۱۸ باشد، میانه آن‌ها کدام است؟

- ۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۹ یا ۱۰ ۴) ۵ یا ۹

۷) میانگین محیط و مساحت‌های تعدادی مربع به ترتیب ۴۴ و ۱۲۵ است. انحراف معیار طول اضلاع این مربع‌ها چقدر است؟

- ۱) ۱ ۲) ۸ ۳) ۲ ۴) ۴

۸) داده با میانگین و انحراف از معیار ۵ و ۱ را با ۱۲ داده دیگر با میانگین و انحراف از معیار ۳ و ۲ مخلوط می‌کنیم. واریانس داده‌های حاصل کدام است؟

- ۱) ۳٫۱۴ ۲) ۳٫۷۶ ۳) ۳٫۱۶ ۴) ۳٫۴۸

۹) ساعت کار دو کارگر در ۶ روز متوالی به شکل روبه‌رو است. کدام کارگر عملکرد بهتری دارد؟

کارگر A	۳	۸	۵	۹	۱۲	۵
کارگر B	۸	۸	۹	۱۱	۴	۲

- ۱) A ۲) B ۳) عملکرد هر دو کارگر یکسان است. ۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد.

۱۰) انحراف معیار دو داده $\sin \theta$ و $\cos \theta$ کدام است؟

- ۱) $\frac{\sin \theta + \cos \theta}{2}$ ۲) $\frac{\sin \theta - \cos \theta}{2}$ ۳) $\frac{|\sin \theta - \cos \theta|}{2}$ ۴) $\frac{|\sin \theta + \cos \theta|}{2}$

۱۱) اگر میانگین داده‌های $3x_1 + 1, 3x_2 + 2, \dots, 3x_{15} + 15$ با میانگین داده‌های $15 - 6x_1, 15 - 6x_2, \dots, 15 - 6x_{15}$ برابر باشد، ضریب تغییرات داده‌های با واریانس ۹ کدام است؟

- ۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $\frac{9}{16}$ ۳) $\frac{3}{16}$ ۴) $\frac{5}{8}$



۱۲) در n داده‌ی آماری $n, \dots, 3, 2, 1$ ضریب تغییرات برابر $1/2$ محاسبه شده است. میانگین داده‌های مفروض را به هر یک از آنان اضافه می‌کنیم. ضریب تغییرات در داده‌های جدید کدام است؟

- ۱) $0/6$ ۲) 1 ۳) $1/2$ ۴) $2/4$

۱۳) اگر واریانس داده‌های $a, b, c, 4$ برابر صفر باشد آنگاه میانگین داده‌های $1+a, 2+b, 3+c, 8$ چقدر است؟

- ۱) $6/5$ ۲) 6 ۳) $7/5$ ۴) 5

۱۴) در 50 داده‌ی آماری، مجموع اختلافات داده‌ها از عدد 12 ، برابر صفر است و مجموع مجذورات اختلاف داده‌ها از عدد 12 ، برابر 450 می‌باشد. ضریب تغییرات این داده‌ها، کدام است؟

- ۱) $0/2$ ۲) $0/25$ ۳) $0/3$ ۴) $0/35$

۱۵) دستگاه A کالایی را با میانگین وزن 150 و انحراف معیار $3/6$ و دستگاه B همان کالا را با میانگین وزن 160 و انحراف معیار $3/84$ بسته‌بندی می‌کنند. دقت عمل کدام، پیرامون میانگین با اطمینان بیشتر است؟

- ۱) یکسان ۲) A ۳) B ۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد.

۱۶) ضریب تغییرات در داده‌های آماری، $0/8$ محاسبه شده است. اگر به هر داده‌ی مفروض 5 واحد اضافه شود، ضریب تغییرات حاصل $0/75$ خواهد شد. میانگین داده‌های اولیه کدام است؟

- ۱) 56 ۲) 64 ۳) 75 ۴) 80

۱۷) در داده‌های $25, 19, 18, 17, 22, 21, 15, 18, 20, 23, 24$ ، واریانس داده‌های بزرگ‌تر از 18 و کوچک‌تر از چارک سوم کدام است؟

- ۱) $1/11$ ۲) $2/25$ ۳) $2/5$ ۴) $1/25$



پاسخنامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۱

$$\bar{x} = \frac{x_1 - 1 + x_2 - 2 + \dots + x_n - n}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n - (1 + 2 + 3 + \dots + n)}{n}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n - \frac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - \frac{n+1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \bar{x} + \frac{n+1}{2}$$

حال، میانگین خواسته شده را بدست می آوریم:

$$\text{میانگین} = \frac{x_1 + 1 + x_2 + 2 + \dots + x_n + n}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + (1 + 2 + \dots + n)}{n}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + \frac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{n+1}{2}$$

$$= \bar{x} + \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} = \bar{x} + n + 1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲

داده‌ها از کوچک به بزرگ مرتب شده داده شده‌اند.

$$\underbrace{3, 3, 4, 6, 6, 8, 8, 9, 11, 12, 12, 13}_{\text{نیمه‌ی دوم داده‌ها}}$$

تعداد داده‌ها ۱۲ تا است. در هر سری شش داده داریم که میانه‌ی شش داده برابر با نصف مجموع دو داده‌ی وسط است. پس داریم:

$$Q_1 = \frac{4 + 6}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad \text{چهارک اول} = \text{میانه‌ی نیمه‌ی اول داده‌ها}$$

$$Q_3 = \frac{11 + 12}{2} = \frac{23}{2} = 11.5 \quad \text{چهارک سوم} = \text{میانه‌ی نیمه‌ی دوم داده‌ها}$$

طبق گفته‌ی مسأله از بین داده‌ها، اعداد کم‌تر از ۵ و بیش‌تر از ۱۱٫۵ را حذف می‌کنیم که اعداد باقی‌مانده عبارتند از:

$$6, 6, 8, 8, 9, 11$$

حالا ضریب تغییرات آن‌ها را می‌خواهیم. ابتدا میانگین را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{2(6) + 2(8) + 9 + 11}{6} = \frac{48}{6} = 8$$

حال، واریانس و سپس انحراف معیار را حساب می‌کنیم:

$$\sigma^2 = \frac{2(6-8)^2 + 2(8-8)^2 + (9-8)^2 + (11-8)^2}{6} = \frac{8 + 0 + 1 + 9}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

$$\Rightarrow \text{انحراف معیار} = \sigma = \sqrt{3}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{3}}{8} \cong \frac{1.7}{8} \cong 0.21$$

۳ اگر یک جامعه با اندازه‌ی n_1 و واریانس σ_1^2 و جامعه‌ی دیگری با اندازه‌ی n_2 و واریانس σ_2^2 وجود داشته باشد و میانگین دو جامعه با هم برابر باشند، واریانس جامعه‌ی حاصل از اجتماع این دو جامعه، از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\sigma^2 = \left(\frac{n_1}{n_1 + n_2}\right)\sigma_1^2 + \left(\frac{n_2}{n_1 + n_2}\right)\sigma_2^2 = \left(\frac{12}{36}\right)(12.6) + \left(\frac{24}{36}\right)(7.2) = \frac{1}{3}(12.6) + \frac{2}{3}(7.2) = 9 \rightarrow \sigma = 3$$

۲۲ داده آماری را به صورت: $x_1, x_2, \dots, x_{22}$ در نظر می‌گیریم که میانگین‌شان برابر ۱۶ و واریانس آنها برابر ۴ است.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \left((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2 \right)$$



$$\Rightarrow 4 = \frac{1}{22} \left((x_1 - 16)^2 + (x_2 - 16)^2 + \dots + (x_{22} - 16)^2 \right)$$

$$\Rightarrow (x_1 - 16)^2 + (x_2 - 16)^2 + \dots + (x_{22} - 16)^2 = 4 \times 22 = 88$$

سه داده ۱۷ و ۲۰ و ۱۱ که به این ۲۲ داده اضافه می‌شوند میانگین شان برابر ۱۶ = $\frac{48}{3} = \frac{11 + 20 + 17}{3}$ است. بنابراین میانگین ۲۵ داده جدید همان ۱۶ است. اکنون واریانس ۲۵ داده جدید را حساب می‌کنیم.

$$\sigma^2 = \frac{1}{25} \left(\underbrace{(x_1 - 16)^2 + (x_2 - 16)^2 + \dots + (x_{22} - 16)^2}_{88} + (11 - 16)^2 + (20 - 16)^2 + (17 - 16)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{25} (88 + 25 + 16 + 1) = \frac{130}{25} = 5.2$$

داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$9, 11, 11, 12, 14, \underbrace{14, 15, 15, 16, 17, 18}_{\text{میانگین}} \rightarrow 11 = \text{چارک اول} \quad 16 = \text{چارک سوم} \quad 1, 2, 3, 4, 5$$

داده‌های خواسته شده عبارتند از: ۱۵، ۱۴، ۱۴، ۱۲، می‌توانیم برای راحتی کار از همه داده‌ها ۱۱ واحد کم کنیم (انحراف معیار تغییر نمی‌کند) و داده‌های جدید عبارتند از: ۱، ۳، ۳، ۴، ۴

$$\bar{x} = \frac{1 + 3 + 3 + 4 + 4}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \left((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2 \right)$$

$$= \frac{1}{5} \left((1 - 3)^2 + (3 - 3)^2 + (3 - 3)^2 + (4 - 3)^2 + (4 - 3)^2 \right) = \frac{6}{5} = 1.2 \Rightarrow \sigma = \sqrt{1.2} \sim 1.1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶ a یا بزرگ‌ترین داده است و یا کوچک‌ترین داده، چون در غیر این صورت کوچک‌ترین داده ۵ و بزرگ‌ترین داده ۱۸ خواهد بود و دامنه تغییرات $13 = 18 - 5$ خواهد شد. پس دو حالت را در نظر می‌گیریم.

$$a \Rightarrow a - 5 = 18 \Rightarrow a = 23 \xrightarrow{\text{ترتیب داده‌ها}} 5, 9, 10, 18, 23 \xrightarrow{\text{میانگین}} 10$$

$$a \Rightarrow 18 - a = 18 \Rightarrow a = 0 \xrightarrow{\text{ترتیب داده‌ها}} 0, 5, 9, 10, 18 \xrightarrow{\text{میانگین}} 9$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷ اگر داده‌ها را طول اضلاع مربع‌ها در نظر بگیریم، محیط هر مربع ۴ برابر طول ضلع هر مربع است، پس میانگین محیط مربع‌ها ۴ برابر میانگین طول

اضلاع است. بنابراین میانگین طول اضلاع $11 = \frac{44}{4}$ است. همچنین مساحت هر مربع مجذور طول ضلع هر مربع است. پس میانگین مساحت مربع‌ها به شکل $\frac{\text{مجموع مربعات}}{\text{تعداد داده‌ها}}$ است. بنابراین واریانس طول ضلع مربع‌ها برابر است با:

$$\sigma^2 = 125 - 11^2 = 125 - 121 = 4 \Rightarrow \sigma = 2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸ از فرمول دوم واریانس برای هر دو دسته داده‌ها داریم:

$$\frac{\text{مجموع مربعات}}{\text{تعداد داده‌ها}} - (\text{میانگین})^2 \Rightarrow 1 = \frac{S_1}{8} - 25 \Rightarrow S_1 = 26 \times 8 = 208$$

$$4 = \frac{S_2}{12} - 9 \Rightarrow S_2 = 12 \times 13 = 156$$

میانگین جدید برابر است با:

$$\frac{8 \times 5 + 12 \times 3}{20} = 3.8$$

پس واریانس داده‌های ترکیب شده برابر است با:

$$\sigma^2 = \frac{208 + 156}{8 + 12} - (\text{میانگین})^2 = \frac{364}{20} - (3.8)^2 = 18.2 - 14.44 = 3.76$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹ عملکرد بهتر در ضریب تغییرات کمتر است. پس میانگین و انحراف معیار هر دو کارگر را محاسبه می‌کنیم:



$$A: 3, 8, 5, 9, 12, 5 \Rightarrow \bar{x} = \frac{3+8+5+9+12+5}{6} = \frac{42}{6} = 7$$

$$\sigma^2 = \frac{(3-7)^2 + (8-7)^2 + (5-7)^2 + (9-7)^2 + (12-7)^2 + (5-7)^2}{6} = \frac{16+1+4+4+25+4}{6} = \frac{54}{6} = 9$$

$$\Rightarrow \sigma = 3 \Rightarrow CV_A = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3}{7}$$

$$B: 8, 8, 9, 11, 4, 2 \Rightarrow \bar{x} = \frac{8+8+9+11+4+2}{6} = \frac{42}{6} = 7$$

$$\sigma^2 = \frac{(8-7)^2 + (8-7)^2 + (9-7)^2 + (11-7)^2 + (4-7)^2 + (2-7)^2}{6} = \frac{1+1+4+16+9+25}{6} = \frac{56}{6} = 9\frac{1}{3} \Rightarrow \sigma \approx 3.1$$

$$\Rightarrow CV_B = \frac{3.1}{7}$$

معروف است که $CV_A < CV_B$

۱۰ می‌دانیم $(\text{میانگین})^2 - \frac{\text{مجموع مربعات}}{\text{تعداد داده‌ها}}$ پس: σ^2

$$\sigma^2 = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{2} - \left(\frac{\sin \theta + \cos \theta}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1 + 2 \sin \theta \cos \theta}{4} = \frac{2 - 1 - 2 \sin \theta \cos \theta}{4} = \frac{1 - 2 \sin \theta \cos \theta}{4}$$

$$= \frac{(\sin \theta - \cos \theta)^2}{4} \Rightarrow \sigma = \frac{|\sin \theta - \cos \theta|}{2}$$

نکته: انحراف معیار دو داده a و b برابر است با:

$$\sigma = \frac{|a-b|}{2}$$

۱۱ نکته: مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ است.

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_r \Rightarrow \frac{(3x_1 + 1) + (3x_r + 2) + \dots + (3x_{15} + 15)}{15} = \frac{(6x_1 - 1) + (6x_r - 2) + \dots + (6x_{15} - 15)}{15}$$

$$\rightarrow 3(x_1 + x_r + \dots + x_{15}) + (1 + 2 + \dots + 15) = 6(x_1 + x_r + \dots + x_{15}) - 120 \rightarrow 3(x_1 + x_r + \dots + x_{15}) = 240$$

$$\rightarrow x_1 + x_r + \dots + x_{15} = 80$$

بنابراین میانگین داده‌های $x_1, x_r, \dots, x_{15}$ برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i}{n} = \frac{80}{15} = \frac{16}{3}$$

$$\sigma^2 = 9 \rightarrow \sigma = 3 \Rightarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3}{\frac{16}{3}} = \frac{9}{16}$$

۱۲ ۱ ۲ ۳ ۴

اگر به تمام داده‌ها، میانگین را اضافه کنیم در این صورت انحراف معیار تغییر نمی‌کند ولی به میانگین، $\bar{x}$ اضافه می‌شود.

$$CV_{\text{مجموع}} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = 1.2$$

$$CV_{\text{میانگین}} = \frac{\sigma}{\bar{x} + \bar{x}} = \frac{\sigma}{2\bar{x}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1}{2} (1.2) = 0.6$$

۱۳ چون واریانس داده‌ها برابر صفر است یعنی تمام داده‌ها با هم برابر هستند یعنی $a = b = c = 4$ است.

$$8, c + 3, b + 2, a + 1 \rightarrow 8, 7, 6, 5 \rightarrow \bar{x} = \frac{8+7+6+5}{4} = \frac{26}{4} = \frac{13}{2} = 6.5$$

۱۴ می‌دانیم مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین برابر صفر است. بنابراین میانگین داده‌ها برابر 12 می‌باشد و داریم:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - 12)^2 + (x_r - 12)^2 + \dots + (x_{50} - 12)^2}{50} = \frac{\text{مجموع مجزورات اختلاف داده‌ها از } 12}{50} = \frac{450}{50} = 9 \Rightarrow \sigma = 3$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0.25$$

۱۵ ضریب تغییرات هر دو را محاسبه می‌کنیم و باهم مقایسه می‌کنیم.



$$CV_A = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3,6}{150} = 0,024, \quad CV_B = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3,84}{160} = 0,024$$

بنابراین دقت عمل آن‌ها یکسان است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۶

$$CV_{\text{قب}} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \rightarrow 0,08 = \frac{\sigma}{\bar{x}} \rightarrow \sigma = 0,08\bar{x}$$

اگر به تمام داده‌ها ۵ واحد اضافه شود انحراف معیار تغییر نمی‌کند ولی به میانگین، ۵ واحد اضافه می‌شود.

$$CV_{\text{جد}} = \frac{\sigma}{\bar{x} + 5} \rightarrow 0,075 = \frac{0,08\bar{x}}{\bar{x} + 5} \rightarrow \frac{75}{1000} = \frac{\frac{8}{100}\bar{x}}{\bar{x} + 5} \rightarrow 80\bar{x} = 75\bar{x} + 375$$

$$\rightarrow 5\bar{x} = 375 \rightarrow \bar{x} = \frac{375}{5} = 75$$

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۷

۱۵, ۱۷, ۱۸, ۱۸, ۱۹, ۲۰, ۲۱, ۲۲, ۲۳, ۲۴, ۲۵ → چارک سوم = ۲۳

$$\bar{x} = \frac{19 + 20 + 21 + 22}{4} = 20,5$$

بنابراین باید واریانس داده‌های ۲۲ و ۲۱ و ۲۰ و ۱۹ را بدست آوریم.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \left((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2 \right)$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{4} \left((19 - 20,5)^2 + (20 - 20,5)^2 + (21 - 20,5)^2 + (22 - 20,5)^2 \right)$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{4} (2,25 + 0,25 + 0,25 + 2,25) = \frac{5}{4} = 1,25$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴

۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴

۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴

۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴